E.N.S.I de Physique - Session 1991

Corrigé de l'épreuve des maths appliquées et algorithmique

Transformation de Fourier discrète et algorithmique.

Corrigé par M.TARQI[1] *http ://alkendy.x10.mx*

•••••••••••••

I. Transformation de Fourier Discrète

Question 1 : Quelques propriétés de l'application $\mathscr{F}$.

(a) Soit $s \in \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$. Montons que $\widehat{s}$ est une suite périodique de période N, pour cela calculons $\widehat{s}(n+N)$ pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\widehat{s}(n+N) &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k)w^{k(n+N)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k)w^{kn}w^N, \quad w^N = 1 \\ &= \widehat{s}(n).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{F}(\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$. Donc la suite $(\widehat{s}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ comporte au plus N éléments distincts qui sont $(\widehat{s}(0), \widehat{s}(1), ..., \widehat{s}(N-1))$.

(b) Soit $s \in \mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors on a :

$$\mathrm{Re}(\widehat{s})(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \text{ et } \mathrm{Im}(\widehat{s})(n) = -\sum_{k=0}^{N-1} s(k)\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

Ceci montre que la partie réelle de $\mathscr{F}(s)$ est paire et sa partie imaginaire est impaire.

(c) Soit $s \in \mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ et paire, d'après la première question $\widehat{s} \in \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$, on a :

- $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{\widehat{s}(n)} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)w^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1} s(-k)w^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1} s(N-k)w^{(N-k)n} = \sum_{l=1}^{N} s(l)w^{ln},$$

  et comme $s(N) = s(0)$, alors

$$\overline{\widehat{s}(n)} = \sum_{l=1}^{N-1} s(l)w^{ln} + s(N)w^{Nn} = \sum_{l=1}^{N-1} s(l)w^{ln} + s(0)w^0 = \sum_{l=0}^{N-1} s(l)w^{ln} = \widehat{s}(n).$$

  Donc $\widehat{s} \in \mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$.
- De la même façon on montre que $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \widehat{s}(-n) = \widehat{s}(n)$.

En conclusion, $s \in \mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ et paire alors $\widehat{s} \in \mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ et paire.

Question 2 : Calcul de la transformation Discrète.

(a) Pour toutes suites s et t de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1}(s+\lambda t)(k)w^{kn} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)w^{kn} + \lambda\sum_{k=0}^{N-1} t(k)w^{kn},$$

[1]Si vous avez des critiques ou des encouragements à formuler sur le contenu, n'hésitez pas à nous en faire part, et surtout n'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

par linéarité de la somme. L'application définie est donc linéaire.
Si $\varphi(s) = (s(0), s(1), ..., s(N-1)) = 0$, alors par périodicité $s(k+N) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donc s est nulle. Donc φ est injective.
Soit maintenant $(s_0, s_1, ..., s_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, alors la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ définie par $s(k) = s_k$ si $0 \leq k \leq N-1$ et $s(k) = s(k')$, où k' désigne le reste de la division euclidienne de k par N, vérifier $\varphi(s) = (s_0, s_1, ..., s_{N-1})$. Donc φ est surjective.
Conclusion : φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}^N$, en conséquence $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}} = \dim \mathbb{C}^N = N$.

(b) Si $s = (s_0, s_1, ..., s_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, alors $\widehat{s} = \mathscr{F}_N(s) = (\widehat{s}(0), \widehat{s}(1), ..., \widehat{s}(N-1))$ où $\widehat{s}(k) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} s_k w^{kn}$.

(c) Puisque $\mathscr{F}$ est linéaire, alors $\mathscr{F}_N$ est linéaire comme composée d'applications linéaires. Désignons par $(e_1, e_2, ..., e_N)$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Donc pour tout $1 \leq l \leq N$, on a :

$$\mathscr{F}_N(e_l) = (1, w^l, ..., w^{jl}, ..., w^{(N-1)l}),$$

et par conséquent l'élément de la j-ième ligne et l-ième colonne est $(w^{(l-1)(j-1)})_{1\leq j,l\leq N}$. Ainsi

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

(d) Soit $s = (s_0, s_1, ..., s_{N-1}) \in \mathbb{C}_N$. Pour calculer les $\widehat{s}(k)$, il faudra calculer la matrice $F_N = (w^{(l-1)(j-1)})_{1\leq j,l\leq N}$, puis effectuer le produit $F_N(s)$.
Le calcul de F_N demande au plus N^2 opérations, et celui de $F_N(s)$ demande N multiplications et N additions, soit $2N$ opérations, et ceci N fois, donc $2N^2$ opérations.
On a donc un algorithme d'ordre $O(N^2)$.

Question 3 : PROPRIÉTÉS DE LA MATRICE F_N.

(a) La norme associée à ce produit scalaire est définie par :

$$\forall x = (x_0, x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N, \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Ainsi $\|\mathscr{F}_N(e_l)\|_2^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} |w^{(l-1)(j-1)}|^2 = p$ $(|w^{(l-1)(j-1)}| = 1)$, et donc $\|\mathscr{F}_N(e_l)\|_2 = \sqrt{p}$ et ceci pour tout $1 \leq l \leq N$.

(b) Soit $l \neq k$, alors $(\mathscr{F}_N(e_l)|\mathscr{F}_N(e_k)) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} w^{-lj} w^{kj} = \sum\limits_{j=0}^{N-1} w^{(k-l)j} = 0$, puisque les $w^{(k-l)j}$ sont exactement les racines N-ièmes de l'unité. Ainsi les vecteurs colonnes de F_N sont deux à deux orthogonaux.

(c) Notons ${}^t\overline{F_N}F_N = (c_{ij})_{0\leq i,j\leq N-1}$, alors pour tout (i,j), on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{p-1} w^{ik} w^{-kj} = \sum_{k=0}^{N-1} w^{(i-j)k} = \begin{cases} N, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où ${}^t\overline{F_N}F_N = NI_N$. Donc F_N est inversible et $F_N^{-1} = \frac{1}{N}{}^t\overline{F_N} = \frac{1}{N}\overline{F_N}$ et par conséquent $\mathscr{F}_N$ est bijective et sa réciproque est l'application définie par :

$$s = (s_0, s_1, ..., s_{N-1}) \longmapsto \mathscr{F}_N^{-1}(s) = (\overline{s}_0, \overline{s}_1, ..., \overline{s}_{N-1})$$

avec $\overline{s}_n = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} s_k w^{-kn}$.

Question 4 : TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE ET CONVOLUTION.

Soient $x = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ et $y = (y_0, y_1, ..., y_{N-1})$ de $\mathbb{C}^N$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{(x * y)}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} z_k w^{kn} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j+l \equiv k (\text{mod } N)} x_j y_l \right) w^{kn} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x_j y_{k-j \pmod N} \right) w^{jn} w^{(k-j)n} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{kn} \right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} y_i w^{in} \right) = \widehat{(x \circ y)}_n.
\end{aligned}$$

et donc $\mathscr{F}_N(x * y) = \mathscr{F}_N(x) \circ \mathscr{F}_N(y)$.

II- TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE

Question 5 : ÉTUDE D'UN EXEMPLE PRÉLIMINAIRE.

(a) Dans ce cas $F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$ et donc $\widehat{s} = \begin{pmatrix} \widehat{s}_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \\ \widehat{s}_1 = s_0 - is_1 - s_2 + is_3 \\ \widehat{s}_2 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 \\ \widehat{s}_3 = s_0 + is_1 - s_2 - is_3 \end{pmatrix}$

(b) On a $w = -i$, donc il suffit de prendre $\left\{ \begin{array}{l} a_0 = s_0 + s_2 \\ b_0 = s_1 + s_3 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = s_0 - s_2 \\ b_1 = s_1 - s_3 \end{array} \right.$.

(c) Le vecteur $\sigma_1 = (a_0, a_1)$ s'écrit comme $F_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_2 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\sigma_2 = (b_0, b_1)$ vérifie la relation :

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = F_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Question 6 : GÉNÉRALISATION ET CALCUL DE "COMPLEXITÉ".

(a) Posons $w_N = w = e^{\frac{-2i\pi}{N}}$, et considérons $s = (s_0, s_1, ..., s_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. Par définition de $\mathscr{F}_N$, on a pour tout $n = 0, 1, ..., N-1$:

$$\widehat{s}_n = \sum_{j=0}^{N-1} s_j w_N^{nj} = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{2j} w_N^{n2j} + \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{2j+1} w_N^{n(2j+1)}$$

Ceci s'écrit aussi $\widehat{s}_n = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{2j} w_{\frac{N}{2}}^{nj} + w_N^n \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{2j+1} w_{\frac{N}{2}}^{nj}$.

Finalement si $0 \leq k \leq \dfrac{N}{2}$, on a :

$$\widehat{s}_n = A_n + w_N^n B_n,$$

où les A_n (resp. B_n) sont les images par $\mathscr{F}_{\frac{N}{2}}$ des vecteurs $s_1 = (s_{2j})_{0\leq j\leq \frac{N}{2}-1}$ (resp. $s_2 = (s_{2j+1})_{0\leq j\leq \frac{N}{2}-1}$), et toujours pour $0 \leq n \leq \dfrac{N}{2}$, on a :

$$\widehat{s}_{n+\frac{N}{2}} = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{2j} w_{\frac{N}{2}}^{(n+\frac{N}{2})j} - w_N^n \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} s_{2j+1} w_{\frac{N}{2}}^{(n+\frac{N}{2})j},$$

et donc

$$\widehat{s}_{n+\frac{N}{2}} = A_n - w_N^n B_n.$$

(b) Notons s_n le nombre d'additions et soustractions et r_n le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $\mathscr{F}_{2^q}(s)$.
On a $\mathscr{F}_2(s_0, s_1) = (s_0 + s_1, s_0 - s_1)$, donc $s_1 = 2$ et $r_1 = 0$. La calcul de $F_{2^n}(a)$ fait intervenir deux transformations de Fourier de taille $\frac{N}{2}$ à savoir $\mathscr{F}_{\frac{N}{2}}(s_1)$ et $\mathscr{F}_{\frac{N}{2}}(s_2)$, ainsi $\frac{N}{2}$ multiplications complexes et N additions complexes. On a donc les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} s_q \leq 2s_{q-1} + N = 2s_{q-1} + 2^q \\ r_q \leq 2r_{q-1} + \dfrac{N}{2} = 2r_{q-1} + 2^{q-1}, \quad q > 1. \end{cases}$$

Mais $u_q = s_q + r_q$, alors on a :

$$u_1 = 2 \text{ et } u_q \leq 2u_{q-1} + 3 \times 2^{q-1}, \quad q > 1.$$

(c) L'inégalité $(*)$ entraîne $\dfrac{u_q}{2^q} \leq \dfrac{u_{q-1}}{2^{q-1}} + \dfrac{3}{2}$ et donc $\dfrac{u_q}{2^q} \leq \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{3}{2}(q-1)$ et par conséquent

$$u_q \leq 2^q + 3(q-1)2^{q-1} = N + \frac{3}{2}N(\log_2 N - 1).$$

(d) La méthode de division décrite dans cette partie demande au plus v_q opérations avec

$$v_q = N + \frac{3}{2}N(\log_2 N - 1) = O(N \log_2 N),$$

alors que la méthode directe de la question $I.2.d$ demande w_q opérations avec

$$w_q = 2N^2 = O(N^2).$$

Conclusion : le calcul par la deuxième méthode est donc très nettement plus rapide que celui par la deuxième méthode.

FIN DE L'ÉPREUVE